14/12/17

<u>Θεώρημα</u>: Το σύνολο $B = \{M + I \mid M \in T^n,\ M \notin Lt(I)\}$ αποτελεί βάση για τον k-διανυσματικό χώρο $k(x_1, \dots, x_n)/I$

<u>Απόδειξη</u>

→ Αρχικά θδο η B παράγει τον χώρο.
Έστω λοιπόν $f + I \in k(x_1, \dots, x_n)/I$
Άρα $f + I = N_G(f) + I$

$\boxed{\text{Όπου } N_G(f) \text{ το υπόλοιπο της διαίρεσης } f \xrightarrow{G}_+ N_G(f)}$

Άρα $f + I = N_G(f) + I = l_1 M_1 + l_2 M_2 + \dots + l_s M_s + I =$
$= l_1 (M_1 + I) + l_2 (M_2 + I) + \dots + l_s (M_s + I)$, όπου $M_i \in T^n$ και $M_i \notin Lt(I)$
Άρα η B παράγει τον χώρο $k(x_1, \dots, x_n)/I$.
→ Τώρα αρκεί νδο τα διανύσματα του B είναι Γ.Α.
Έστω $\lambda_1 (M_1 + I) + \lambda_2 (M_2 + I) + \dots + \lambda_t (M_t + I) = 0 + I \Rightarrow$
$\Rightarrow (\lambda_1 M_1 + I) + (\lambda_2 M_2 + I) + \dots + (\lambda_t M_t + I) = 0 + I \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_t M_t + I = 0 + I \Rightarrow \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_t M_t - 0 \in I$
$\Rightarrow \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_t M_t \in I \Rightarrow f = 0 \ \vee \ f \neq 0$
Έστω $f = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_t M_t \in I$
Έστω $f \neq 0$
Επίσης έχω $f \in I$ $\Big\} \Rightarrow \exists\, g_i \in G : lm(g_i) \mid lm(f) \Rightarrow lm(g_i) \mid lm(f) = M_j \Rightarrow$
$\Rightarrow M_j \in Lt(I)$. ΑΤΟΠΟ αφού $M_j + I \in B$
Άρα $f = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_t = 0$. Άρα είναι Γ.Α.
Άρα τα στοιχεία του B παράγουν τον χώρο και είναι Γ.Α.
Άρα είναι βάση του $k(x_1, \dots, x_n)/I$

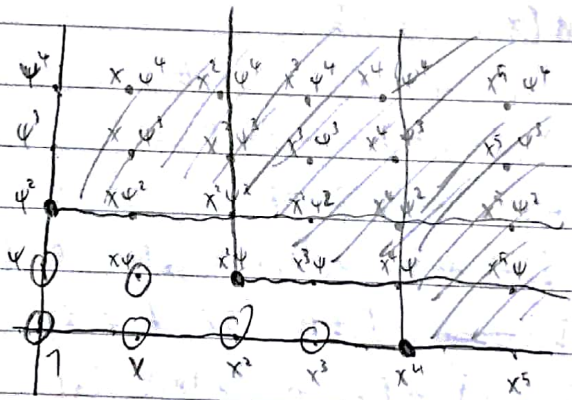
Scanned by CamScanner

Ασκήσεις - Παραδείγματα.

7) Έστω $\mathbb{Q}(x,\psi)$ δακτύλιος με διάταξη "deglex" με $\psi > x$.
Έστω $I = \langle \psi x^2 - 4x, \psi^2 + x^2 - 5 \rangle$.
Να πάρω στοιχεία για τον $\mathbb{Q}(x,\psi)/I$ (Διάσταση και Βάση)

Λύση

Αρχικά πρέπει να βρώ μια βάση Gröbner για να βρώ το $Lt(I)$.
Δίνεται G: βάση Gröbner $= \{\psi x^2 - 4x, \psi^2 + x^2 - 5, x^4 + 4x\psi - 5x^2\}$
Άρα $Lt(I) = \langle \psi x^2, \psi^2, x^4 \rangle$.
Για να βρώ την διάσταση $\dim(\mathbb{Q}(x,\psi)/I)$ αρκεί να βρώ μια βάση.
Βάση αυτού του χώρου είναι το $B = \{M + I \mid M \in T^2, \text{ με } M \notin Lt(I)\}$.
Έχω δείξει ότι $M \in T^2$, άρα για τα μονώνυμα $\in T^2$ έχω:



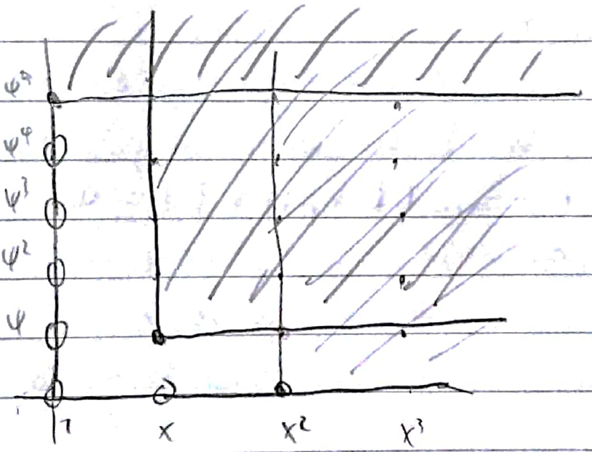
και ξέρω $M \notin Lt(I) = \langle \psi x^2, \psi^2, x^4 \rangle$, από τον "πίνακα" διαγράφω όλα τα πολλαπλάσια των όρων.
Άρα τελικά μου έμειναν 6 στοιχεία
Άρα $\dim(\mathbb{Q}(x,\psi)/I) = 6$.
Άρα βάση του $\mathbb{Q}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{Q}(x,\psi)/I$ είναι
$B = \{1+I, x+I, x^2+I, x^3+I, \psi+I, x\psi+I\}$
Άρα για τυχαίο στοιχείο f έχω
$f + I = \lambda_1(1+I) + \lambda_2(x+I) + \lambda_3(x^2+I) + \dots + \lambda_6(x\psi+I) = \dots =$
$= \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 + \lambda_5 \psi + \lambda_6 x\psi + I$

(Παρατήρηση: Για την εύρεση της διάστασης δεν με ενδιαφέρει η διάταξη, άρα μπορώ να πάρω όποια με βολεύει έτσι ώστε να με διευκολύνει στην εύρεση βάσης Gröbner.
Π.χ. αν εδώ έπαιρνα την διάταξη "Lex" όπως με $x>\psi$, θα έβρισκα πιο εύκολα την βάση Gröbner (λόγω των S_i))

2) Έστω δακτύλιος $\mathbb{Z}_5(x,\psi)$ με διάταξη "grlex" με $x>\psi$.
Έστω $I = \langle x^2+\psi^2+1,\ x^2\psi+2x\psi+x \rangle$
Να βρεθούν στοιχεία για την $\mathbb{Z}_5(x,\psi)/I$.

Λύση

Αρχικά βρίσκουμε μια βάση Gröbner για να βρω το $Lt(I)$.
Δίνεται βάση Gröbner $= \{x^2+\psi^2+1,\ x\psi+3x+2\psi^3+2\psi,\ \psi^5+2\psi^4+4\psi^2+4\psi+2\}$.
Άρα $Lt(I) = \langle x^2, x\psi, \psi^5 \rangle$
Εργάζομαι όμοια με την άσκηση 1, άρα έχω:



Άρα $\dim(\mathbb{Z}_5(x,\psi)/I) = 6$.
Άρα βάση του $\mathbb{Z}_5$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{Z}_5(x,\psi)/I$ είναι
$B = \{\psi^4+I, \psi^3+I, \psi^2+I, \psi+I, 1+I, x+I\}$.
Άρα για τυχαίο στοιχείο f, έχω
$f+I = \lambda_1(\psi^4+I)+\lambda_2(\psi^3+I)+\lambda_3(\psi^2+I)+\lambda_4(\psi+I)+\lambda_5(1+I)+\lambda_6(x+I)+I =$
$\dots = \lambda_1\psi^4+\lambda_2\psi^3+\lambda_3\psi^2+\lambda_4\psi+\lambda_5+\lambda_6 x+I$
Άρα έχω 5^6 στοιχεία $\to \mathbb{Z}_5(x,\psi)/I \simeq \mathbb{Z}_5^6$

Scanned by CamScanner

3) Έστω δακτύλιος $R(x,\psi,z)$ με διάταξη "$>_{lex}$" με $z>\psi>x$.

Έστω $I = \langle x^2\psi + z,\ xz+\psi\rangle$.

Να πάρω στοιχεία για τον $R(x,\psi,z)/I$.

<u>Λύση</u>

Αρχικά πρέπει να βρω μια βάση Gröbner για να βρω το $Lt(I)$.

Δίνεται G: Βάση Gröbner $= \{z + x^2\psi,\ x^3\psi - \psi\}$

Άρα $Lt(I) = \langle z, x^3\psi\rangle$.

→ Εδώ γράφω έχω 3 μεταβλητές ΔΕΝ μπορώ να δουλέψω γεωμετρικά ←

$$\left.\begin{array}{l}\text{Έχω ότι } M \notin Lt(I).\\ \text{Επίσης } M \text{ είναι της μορφής } M = x^a\psi^b z^c\end{array}\right\} \Rightarrow x^a\psi^b z^c \notin \langle z, x^3\psi\rangle. \quad (1)$$

Άρα της (1) παίρνω ότι:

i) $c=0$, καθώς αν $c \geq 1$ θα ήταν πολλαπλάσιο του ιδεώδους.

ii) Επίσης M είναι της μορφής $M = x^a\psi^b$ και θέλω $M \notin Lt(I)$ σημαίνει πως δεν πρέπει να πάρω πολλαπλάσιο του $x^3\psi$.

Άρα τα στοιχεία της βάσης είναι τα:

$$\left.\begin{array}{l} 1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\\ \psi, \psi^2, \psi^3, \dots, \psi^n\\ x\psi, x^2\psi\\ x\psi^2, x\psi^3, x\psi^4, \dots, x\psi^n\\ x^2\psi^2, x^2\psi^3, \dots, x^2\psi^n \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Άρα } \dim(R(x,\psi,z)/I) = \infty.$$

Άρα βάση του $R(x,\psi,z)/I$ είναι

$B = \{$"το καθένα από αυτά" $+ I\}$

• **Απαλοιφή**

Ορισμός: Έστω δακτύλιος $K[x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m]$.
Έστω X_1, X_2 μονώνυμα στις Χ-μεταβλητές και $Ψ_1, Ψ_2$ μονώνυμα στις Ψ-μεταβλητές. Ορίζουμε $X_1Ψ_1 < X_2Ψ_2$ αν-ν
$X_1 <_x X_2 \vee (X_1 = X_2$ και $Ψ_1 <_ψ Ψ_2)$
Η διάταξη αυτή ονομάζεται διάταξη απαλοιφής με τις Χ-μεταβλητές μεγαλύτερες των Ψ-μεταβλητών.
Όπου: • $<_x$: μια μονωνυμική διάταξη στις Χ-μεταβλητές
• $<_ψ$: μια μονωνυμική διάταξη στις Ψ-μεταβλητές

Θεώρημα: Μια διάταξη απαλοιφής είναι μονωνυμική διάταξη.

Απόδειξη

Πρέπει να δείξω τις 5 ιδιότητες.

1) Έστω $X_1Ψ_1 < X_1Ψ_1 \rightarrow X_1 = X_1$, άρα πρέπει $Ψ_1 <_ψ Ψ_1$.
Όμως αφού $<_ψ$ είναι μονωνυμική διάταξη έχω άτοπο.

2) Έστω $X_1Ψ_1 < X_2Ψ_2$ και $X_2Ψ_2 < X_3Ψ_3$
Άρα έχω: • $X_1Ψ_1 < X_2Ψ_2 \Rightarrow X_1 <_x X_2 \vee (X_1 = X_2$ και $Ψ_1 <_ψ Ψ_2)$ (i)
• $X_2Ψ_2 < X_3Ψ_3 \Rightarrow X_2 <_x X_3 \vee (X_2 = X_3$ και $Ψ_2 <_ψ Ψ_3)$ (ii)

Άρα έχω:
(i) → σε κάθε περίπτωση: $X_1 \leq_x X_2$
(ii) → σε κάθε περίπτωση: $X_2 \leq_x X_3$
$\Rightarrow X_1 \leq_x X_3 \Rightarrow \underbrace{X_1 <_x X_3}_{1η\ περ} \vee \underbrace{X_1 = X_3}_{2η\ περ}$

Άρα έχω:
• 1η περ: $X_1 <_x X_3 \Rightarrow X_1Ψ_1 < X_3Ψ_3$
• 2η περ: $X_1 = X_3$
Έχω τότε $X_1 \leq_x X_2 \leq_x X_3 \Rightarrow \boxed{X_1 = X_2} = X_3$
Άρα: $X_1 = X_2 \Rightarrow Ψ_1 <_ψ Ψ_2$
$X_2 = X_3 \Rightarrow Ψ_2 <_ψ Ψ_3$
$\Rightarrow Ψ_1 <_ψ Ψ_3$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχω $x_1\psi_1 \leq x_3\psi_3$

3) Έστω $x_1\psi_1$, $x_2\psi_2$

Έχω ότι:

· $\leq$: μονωνυμική διάταξη $\Longrightarrow$ · 1η περ.: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_1\psi_1 < x_2\psi_2$

· 2η περ.: $x_1 >_x x_2 \Rightarrow x_1\psi_1 > x_2\psi_2$

· 3η περ.: $x_1 = x_2 \to$ τότε κοιτάω τα ψ.

Άρα έχω $x_1 = x_2$ και:

· $\leq$: μονωνυμική διάταξη $\Rightarrow$ · $\psi_1 \leq \psi_2 \xRightarrow{x_1=x_2} x_1\psi_1 < x_2\psi_2$

· $\psi_1 >_\psi \psi_2 \xRightarrow{x_1=x_2} x_1\psi_1 > x_2\psi_2$

· $\psi_1 = \psi_2 \xRightarrow{x_1=x_2} x_1\psi_1 = x_2\psi_2$

4) Έστω $x_1\psi_1 \neq 1 \Longrightarrow \underbrace{x_1 \neq 1}_{1η\ περ.} \vee \underbrace{x_1 = 1 \text{ και } \psi_1 \neq 1}_{2η\ περ.}$

Άρα έχω:

1η περ.: $x_1 \neq 1 \Rightarrow 1 \leq x_1 \Rightarrow 1 < x_1\psi_1$

2η περ.: $x_1 = 1$ και $1 \leq \psi_1 \Rightarrow 1 < x_1\psi_1$

$\Rightarrow$ Άρα σε κάθε περίπτωση $1 < x_1\psi_1$

5) Έστω $x_1\psi_1 < x_2\psi_2 \Longrightarrow x_1 \leq x_2 \vee (x_1 = x_2$ και $\psi_1 \leq_\psi \psi_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow xx_1 \leq xx_2 \vee (xx_1 = xx_2$ και $\psi\psi_1 < \psi\psi_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow xx_1\psi\psi_1 < xx_2\psi\psi_2 \Rightarrow x\psi x_1\psi_1 < x\psi x_2\psi_2$.

Άρα αφού πληρούνται και οι 5 ιδιότητες είναι μονωνυμική διάταξη.

Παρατήρηση: Σε μια διάταξη απαλοιφής με τις x-μεταβλητές μεγαλύτερες από τις ψ-μεταβλητές, οποιοδήποτε μονώνυμο ψ στις ψ-μεταβλητές είναι μικρότερο από οποιοδήποτε μονώνυμο που έχει τουλάχιστον μία x-μεταβλητή.

2) Αν έχω μια διάταξη απαλοιφής "$\leq$" με $x > \psi$ και έχω ότι $f \in k(x_1,\dots,x_n,\psi_1,\dots)$

Τότε αν $f = lt(f) + \dots \Rightarrow f \in k(\psi_1,\dots,\psi_n)$ καθώς δεν μπορεί να έχει κάποιο όρο με x, γιατί θα ήταν μεγαλύτερος
$lt(f) = \psi$

Θεώρημα: Έστω I ένα μη-μηδενικό ιδεώδες του $k(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ και "$<$" μια διάταξη απαλοιφής ως τις x-μεταβλητές μεγαλύτερες των y-μεταβλητών.
Αν $G=\{g_1,\dots,g_t\}$ είναι βάση Gröbner του I τότε $G\cap k(y_1,\dots,y_m)$ είναι βάση Gröbner του $I\cap k(y_1,\dots,y_m)$.

Απόδειξη.

Έστω $f\neq 0$ και $f\in I\cap k(y_1,\dots,y_m) \Rightarrow f\in I \wedge f\in k(y_1,\dots,y_m)$.
Άρα $\left.\begin{array}{l} f\neq 0\\ f\in I\end{array}\right\} \xrightarrow{G:\ \text{βάση Gröbner}} \exists\, g_i : \mathrm{lm}(g_i) \mid \mathrm{lm}(f)$.
Αφού όμως $f\in k(y_1,\dots,y_m) \Rightarrow$ στο $\mathrm{lm}(f)$ εμφανίζονται μόνο y-μεταβλητές.
Άρα αφού $\mathrm{lm}(g_i)\mid \mathrm{lm}(f) \Rightarrow$ στο $\mathrm{lm}(g_i)$ εμφανίζονται μόνο y-μεταβλητές $\Rightarrow$
$\Rightarrow g_i\in k(y_1,\dots,y_m) \Rightarrow g_i\in G\cap k(y_1,\dots,y_m)$
Άρα αν $f\neq 0$ και $f\in I\cap k(y_1,\dots,y_m)$ έδειξα ότι
$\exists\, g_i\in G\cap k(y_1,\dots,y_m)$ τ.ω. $\mathrm{lm}(g_i)\mid \mathrm{lm}(f)$
Άρα $G\cap k(y_1,\dots,y_m)$ είναι βάση Gröbner του $I\cap k(y_1,\dots,y_m)$

Θεώρημα: Έστω $I=\langle f_1,\dots,f_s\rangle$ και $J=\langle h_1,\dots,h_t\rangle$ δύο ιδεώδη του $k(x_1,\dots,x_n)$ και w μια νέα μεταβλητή.
Τότε στον δακτύλιο $k(w,x_1,x_2,\dots,x_n)$ ισχύει: $I\cap J=(\langle w\rangle I+\langle 1-w\rangle J)\cap k(x_1,\dots,x_n)$

Απόδειξη

Θ.δ.ο. $I\cap J \overset{\subseteq}{=} (\langle w\rangle I+\langle 1-w\rangle J)\cap k(x_1,\dots,x_n)$
Έστω $f\in I\cap J\subseteq k(x_1,\dots,x_n) \Rightarrow f\in k(x_1,\dots,x_n)$ (1)
Άρα μένει ν.δ.ο. $f\in(\langle w\rangle I+\langle 1-w\rangle J)$
Δηλ. πρέπει η f να γραφτεί ως: $f = w\overset{\in I}{\boxed{}} + (1-w)\overset{\in J}{\boxed{}}$
Έχω ότι $f\in I\cap J \Rightarrow f\in I \wedge f\in J$.
Άρα στα κουτάκια μπορώ να βάλω το f.
Άρα $f=wf+(1-w)f \Rightarrow f\in(\langle w\rangle I+\langle 1-w\rangle J)$. (2)
Άρα (1),(2) $\Rightarrow f\in(\langle w\rangle I+\langle 1-w\rangle J)\cap k(x_1,\dots,x_n)$

Άρα $I \cap J \subseteq (\langle w \rangle I + \langle 1-w \rangle J) \cap k(x_1, \dots, x_n)$. (i)

• Έστω $f \in (\langle w \rangle I + \langle 1-w \rangle J) \cap k(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow f \in (\langle w \rangle I + \langle 1-w \rangle J) \wedge f \in k(x_1, \dots, x_n)$

Άρα αφού $f \in k(x_1, \dots, x_n)$ έχω ότι είναι της μορφής:

$$f(x_1, \dots, x_n) = h_1(w, x_1, \dots, x_n)\, w\, f_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + h_s(w, x_1, \dots, x_n)\, w\, f_s(x_1, \dots, x_n) +$$

$$+ g_1(w, x_1, \dots, x_n)\,(1-w)\, q_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + g_t(w, x_1, \dots, x_n)\,(1-w)\, q_t(x_1, \dots, x_n) \quad (1)'$$

• Βάζω $w = 1$ στην $(1)'$ και έχω:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1, \dots, x_n) = h_1(1, x_1, \dots, x_n) \cdot f_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + h_s(1, x_1, \dots, x_n) \cdot f_s(x_1, \dots, x_n) + 0 \in I \\ \text{• Βάζω } w = 0 \text{ στην } (1)' \text{ και έχω:} \\ f(x_1, \dots, x_n) = 0 + g_1(0, x_1, \dots, x_n) \cdot q_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + g_t(0, x_1, \dots, x_n) \cdot q_t(x_1, \dots, x_n) \in J \end{array}\right\} \Rightarrow f \in I \cap J$$

Άρα $(\langle w \rangle I + \langle 1-w \rangle J) \cap k(x_1, \dots, x_n) \subseteq I \cap J$. (ii)

Άρα από (i), (ii) έχω:

$$(\langle w \rangle I + \langle 1-w \rangle J) \cap k(x_1, \dots, x_n) = I \cap J$$